محاضرة رياضة ١٢

$\boxed{Ex}$ show that if $f(z)$ is analytic and bounded then $f(z)$ must be constant. use Cauchy Integral Form

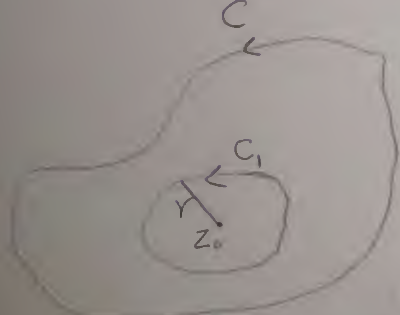
Sol

C.I

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\left.\frac{d^n f(z)}{dz^n}\right|_{z=z_0}$$

ـــ الدالة تكون محدودة إذا كان

$|f(z)| \leq M$



ـــ نفرض دائرة مركزها Z_0 ونصف قطرها

(r) داخل C

$$\oint = \oint_{C_1}$$

Note

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|$$

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \right| \leq \oint \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\, dz$$

$$|z-z_0| = r$$

Note

$dz = dx + i\,dy$

$|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$\left| \oint_{C_1} \right| \leq \frac{M}{r^{n+1}} \oint_C |dz|$$

وحدة طول

جزء من الدائرة وتجميعها يعطى محيط الدائرة بالكامل.

$$\left| \oint_{C_1} \right| \leq \frac{M}{r^{n+1}} (2\pi r)$$

$$\leq \frac{M}{r^n} (2\pi)$$

$$\therefore \frac{2\pi i}{n!} \left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0} \leq \frac{2\pi M}{r^n} \quad ; |i| = 1$$

$n = 1$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$$

as $r \longrightarrow 0$

$|f'(z_0)| \leq 0$ * لا يوجد مقياس سالب

$f'(z_0) = 0$

$f(z_0) = C$ for all z_0.

$f(z) = \text{Constant}$

<u>**Note**</u> if $r = \infty$ معناها إننا هنا أخذ Z-plane بالكامل.

$\therefore |f'(z_0)| = 0$

Taylor expansion

← في هذا الجزء ندرس مفكوك (Taylor)

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots\ldots$$

$0 < |z-z_0| < R$ منطقة التقارب

← ممكن وضع قيم مختلفة لـ R حتى ∞.

— نحاول فك الدوال في هذا الجزء بدلالة مفكوك لبعض
الدوال المعلومة ثم نقرب رأس المسألة إلى شكل المفكوك

***Some Important expansion:-**

Notes

$\boxed{1}$ $$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{\text{أي حاجة}} = \sum \frac{(\text{أي حاجة})^n}{n!}$$

$$e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

فترة التقارب هي $0 < |z| < \infty$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\longrightarrow e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} \cdots$$

$\boxed{2}$
$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \cdots$$

فترة التقارب هي
$0 < |z| < \infty$

$\boxed{3}$
$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots$$

فترة التقارب هي
$0 < |z| < \infty$

Note

$\sinh(iz) = i \sin z$; $i^2 = -1$, $(i)^4 = 1$

$\cosh(iz) = \cos z$;

$\boxed{4}$

فترة التقارب
$0 < |z| < \infty$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \cdots$$

$\boxed{5}$

فترة التقارب هي
$0 < |z| < \infty$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots$$

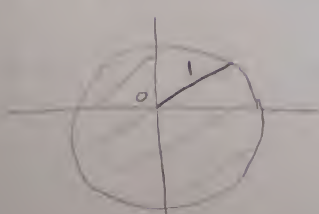
$\boxed{6}$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

← الحدود من (1 حتى z^2) هي من تعطي قيمة المفكوك
لذلك يجب أن تكون قيم z محصورة مابين 0 ، 1 .

هذا هو الشرط

$$\boxed{0 < |z| < 1}$$



دائرة نصف قطرها (1)
ومركزها = 0

$\boxed{7}$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad 0 < |z| < 1$$

أسلوب حل المسائل للصورة من 1 لـ 7

ـــ نحاول أن نجعل رأس المسألة تصل إلى صورة من الصور السابقة ومن خلالها يمكن جمع صورتين أو طرحهم أو تفاضل أي صور أو تكامل حتى نصل للصورة المطلوبة.

Ex. Expand the following function at indicated points and region.

1. $f(z) = e^{2z}$ at $z_0 = 1$

2. $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ at $z_0 = 0$ and find $\tan^{-1} z$

3. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$ on $0 \leqslant |z-1| < 1$

4. Find Taylor series for $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ on $|z| < 1$ and use it to find

$$\sum r^n \cos n\theta \quad ; \quad \sum r^n . \sin n\theta$$

$\boxed{1}$

سـ أول مسألة ($Z_0=1$) ـ عايزين الأقواس داخلها تكون

$$(z-z_0) \xrightarrow{\text{instead of}} z-1$$

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{2z} = e^{2(z+1-1)} = e^{2} \cdot e^{2(z-1)}$$

$$e^{2z} = e^{2}\left[1 + 2(z-1) + \frac{(2(z-1))^2}{2!} + \frac{(2(z-1))^3}{3!} \cdots\right]$$

$$= e^{2}\left[1 + 2(z-1) + 2(z-1)^2 + \frac{8}{3!}(z-1)^3 \cdots\right]$$

$\boxed{2}$ $$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 \cdots$$

$$u \to z^2$$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \cdots$$ $\tan^{-1}$

$$\because \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$$ tan

$$\therefore \tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} \cdots$$

$\boxed{7}$

$\boxed{3}$ $$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

– من شكل شرط منطقة الفك $(0 < |z-1| < 1)$ يمكن
معرفة $(z_0 = 1)$ أي أن الأقواس في الفك يكون داخلها
$\boxed{z-1}$

– إذا تواجد قوس بداخله $(z-1)$ عند التحليل يكون جاهز
نتركه كما هو و نجهز القوس الآخر.

– لو كل الأقواس لا تحتوي على $(z-1)$ نستخدم الكسور
الجزئية لتبسيط المسألة.

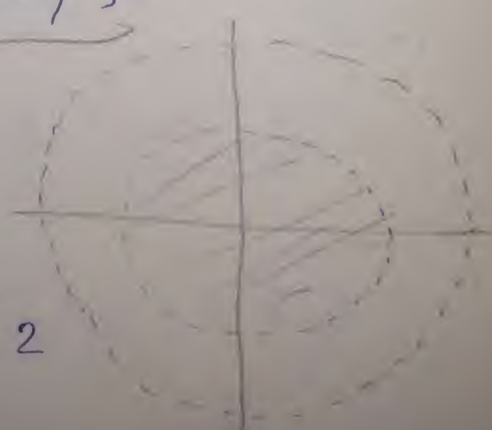
$$f(z) = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z-3} \qquad \therefore a = -1 \, , \, b = 1$$

$$\therefore f(z) = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3} = \frac{-1}{(z-1)-1} + \frac{1}{(z-1)-2}$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{1-(z-1)}} - \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{1}{1-\left(\frac{z-1}{2}\right)}\right]}$$

$$|z-1| < 1 \qquad\qquad \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$$

$$\therefore |z-1| < 1 \qquad ; \quad |z-1| < 2$$



The region is: $0 < |z-1| < 1$

$$f(z) = \left[1 + (z-1) + (z-1)^2 + \cdots\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(z-1)}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} + \cdots\right]$$

$\boxed{4}$ $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$; $|z| < 1$

← المطلوب داخل الأقواس $(z-z_0)$ $\xleftarrow{\text{بدلاً منها}}$ $z = (z-0)$

← عايزين المفكوك بدلالة قوى z إذا احتوى جزء على $z^{(\text{رقم})}$ يكون جاهز ونقوم بتجهيز الآخر.

$$f(z) = z\left[\frac{1}{1-z}\right]$$

$$= z\left[1 + z + z^2 + z^3 \cdots\right] \quad ; \; |z| < 1$$

$$= z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$$

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

$\boxed{9}$ f...

$$\because \; Z = r e^{i\theta} \Longrightarrow Z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$Z^n = r^n \left[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \right]$$

$$\frac{r e^{i\theta}}{1 - r e^{i\theta}} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) + i\, r^n \sin(n\theta)$$

$$\underline{\underline{L.H.S}} = \frac{r e^{i\theta}}{1 - r e^{i\theta}} = \frac{r \cos\theta + r i \sin\theta}{(1 - r\cos\theta) - i r \sin\theta}$$

$$\frac{(1 - r\cos(\theta)) + i r \sin\theta}{(1 - r\cos(\theta)) + i r \sin\theta} \times \text{بالضرب}$$

$$L.H.S = \frac{r\cos\theta\,(1 - r\cos\theta) - r^2 \sin\theta}{(1 - r\cos(\theta))^2 + r^2 \sin^2\theta}$$

$$+ i \frac{r \sin\theta\,(1 - r\cos\theta) + r^2 \cos\theta \sin\theta}{(1 - r\cos(\theta))^2 + r^2 \sin^2\theta}$$

$$\sum r^n \cos n\theta$$

$$\sum r^n \sin(n\theta)$$

مفكوك لورنتز

Laurents series

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{on} \quad r < |z-z_0| < R$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

← هو نفسه مفكوك Taylor بنفس القواعد السابقة ولكنه يحتوى على أقواس ذات أس سالب.

$$f(z) = \cdots\cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1 (z-z_0)^1 \cdots$$

← أهم جزء فى المفكوك هو معامل القوس الذى أسه = -1

لأنه أى دالة لكى نوجد تكاملها نقوم بفكها بواسطة لورنتز ونجيب معامل القوس اللى أسه -1 ونضربه فى $\boxed{2\pi i}$

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

Ex use Laurent's series to show that

$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$ where $f(z)$ is analytic

on the region $r < |z - z_0| < R$

Sol

use

$$\oint_C (z-z_0)^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & m \neq -1 \end{cases} \longrightarrow (1)$$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$f(z) = \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

بالضرب * $(z-z_0)^m$

$$f(z)(z-z_0)^m = \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + a_2(z-z_0)^{m+2} \cdots$$

بالتكامل على المنحنى c واستخدام الصورة (1)

$m = 0 \Longrightarrow \oint f(z)\,dz = a_{-1}(2\pi i)$